La geometría del grupo de Heisenberg

Juan Manuel Lorenzo Naveiro

jm.lorenzo@usc.es

Seminario de Introducción a la Investigación
24/02/2021

¿Qué es una variedad subriemanniana?

Definición

Una variedad subriemanniana (M, Δ, g) consta de:

¿Qué es una variedad subriemanniana?

Definición

Una variedad subriemanniana (M, Δ, g) consta de:

- Una variedad diferenciable **conexa** M.

¿Qué es una variedad subriemanniana?

Definición

Una variedad subriemanniana (M, Δ, g) consta de:

- Una variedad diferenciable **conexa** M.
- Una métrica de Riemann g sobre M.

¿Qué es una variedad subriemanniana?

Definición

Una variedad subriemanniana (M, Δ, g) consta de:

- Una variedad diferenciable **conexa** M.
- Una métrica de Riemann g sobre M.
- Una distribución $\Delta \subseteq T(M)$ cumpliendo la condición de Hörmander.

¿Qué es una variedad subriemanniana?

Definición

Una variedad subriemanniana (M, Δ, g) consta de:

- Una variedad diferenciable **conexa** M.
- Una métrica de Riemann g sobre M.
- Una distribución $\Delta \subseteq T(M)$ cumpliendo la condición de Hörmander.

Nos interesan las curvas $\gamma(t)$ en M tales que $\gamma' \in \Delta$.

El problema isoperimétrico en $\mathbb{R}^2$

$\alpha(t) = (x(t), y(t))$ curva en $\mathbb{R}^2$ con $\alpha(0) = (0, 0)$.

El problema isoperimétrico en $\mathbb{R}^2$

$\alpha(t) = (x(t), y(t))$ curva en $\mathbb{R}^2$ con $\alpha(0) = (0,0)$.

- Longitud:

$$\mathcal{L}(\alpha) = \int_0^T ||\alpha'(t)||dt = \int_0^T \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt.$$

El problema isoperimétrico en $\mathbb{R}^2$

$\alpha(t) = (x(t), y(t))$ curva en $\mathbb{R}^2$ con $\alpha(0) = (0,0)$.

- Longitud:

$$\mathcal{L}(\alpha) = \int_0^T ||\alpha'(t)|| dt = \int_0^T \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

- Área:

$$\mathcal{A}(\alpha) = \frac{1}{2} \int_0^T x(t)y'(t) - y(t)x'(t) dt.$$

El problema isoperimétrico en $\mathbb{R}^2$

$\alpha(t) = (x(t), y(t))$ curva en $\mathbb{R}^2$ con $\alpha(0) = (0,0)$.

- Longitud:

$$\mathcal{L}(\alpha) = \int_0^T ||\alpha'(t)||dt = \int_0^T \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt.$$

- Área:

$$\mathcal{A}(\alpha) = \frac{1}{2}\int_0^T x(t)y'(t) - y(t)x'(t)dt.$$

Problemas

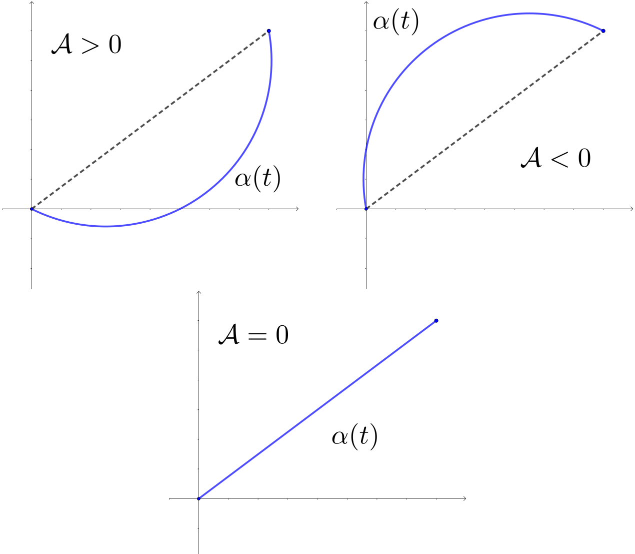
- Fijada $\mathcal{L}$, maximizar $\mathcal{A}$.
- Fijada $\mathcal{A}$, minimizar $\mathcal{L}$.

El problema isoperimétrico en $\mathbb{R}^2$

Las soluciones de ambos problemas son arcos de circunferencia:

El problema isoperimétrico en $\mathbb{R}^2$

Las soluciones de ambos problemas son arcos de circunferencia:



El grupo de Heisenberg $\mathbb{G} = \mathbb{R}^3$

- Idea: levantar curvas planas a $\mathbb{R}^3$ con una coordenada “área”.

El grupo de Heisenberg $\mathbb{G} = \mathbb{R}^3$

- Idea: levantar curvas planas a $\mathbb{R}^3$ con una coordenada "área".

$$\pi\colon (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Propiedad fundamental de $\mathbb{G}$

Las geodésicas de $\mathbb{G}$ se corresponden (mediante π) con las soluciones del problema isoperimétrico.

El grupo de Heisenberg $\mathbb{G} = \mathbb{R}^3$

- Idea: levantar curvas planas a $\mathbb{R}^3$ con una coordenada "área".

$$\pi\colon (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Propiedad fundamental de $\mathbb{G}$

Las geodésicas de $\mathbb{G}$ se corresponden (mediante π) con las soluciones del problema isoperimétrico.

$\alpha(t) = (x(t), y(t))$ curva en $\mathbb{R}^2$ con $\alpha(0) = (0, 0)$. La levantamos a $\mathbb{R}^3$ con

$$z(t) = \frac{1}{2} \int_0^t x(s)y'(s) - y(s)x'(s)ds.$$

El grupo de Heisenberg $\mathbb{G} = \mathbb{R}^3$

- Idea: levantar curvas planas a $\mathbb{R}^3$ con una coordenada "área".

$$\pi\colon (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Propiedad fundamental de $\mathbb{G}$

Las geodésicas de $\mathbb{G}$ se corresponden (mediante π) con las soluciones del problema isoperimétrico.

$\alpha(t) = (x(t), y(t))$ curva en $\mathbb{R}^2$ con $\alpha(0) = (0, 0)$. La levantamos a $\mathbb{R}^3$ con

$$z(t) = \frac{1}{2} \int_0^t x(s)y'(s) - y(s)x'(s)ds.$$

Luego,

$$z'(t) = \frac{1}{2}[x(t)y'(t) - y(t)x'(t)].$$

El grupo de Heisenberg $\mathbb{G} = \mathbb{R}^3$

- $\xi = dz - \dfrac{1}{2}(xdy - ydx)$. $\Delta = \ker \xi$.

El grupo de Heisenberg $\mathbb{G} = \mathbb{R}^3$

- $\xi = dz - \dfrac{1}{2}(xdy - ydx)$. $\Delta = \ker \xi$.
- $\Delta = \mathrm{Span}\{X, Y\}$, donde

$$\begin{cases} X = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2}\frac{\partial}{\partial z} \\ Y = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2}\frac{\partial}{\partial z} \\ Z = \frac{\partial}{\partial z} \end{cases}$$

El grupo de Heisenberg $\mathbb{G} = \mathbb{R}^3$

- $\xi = dz - \dfrac{1}{2}(xdy - ydx)$. $\Delta = \ker \xi$.
- $\Delta = \mathrm{Span}\{X, Y\}$, donde

$$\begin{cases} X = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2}\frac{\partial}{\partial z} \\ Y = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2}\frac{\partial}{\partial z} \\ Z = \frac{\partial}{\partial z} \end{cases}$$

- $[X, Y] = Z$, $[X, Z] = [Y, Z] = 0$.

El grupo de Heisenberg $\mathbb{G} = \mathbb{R}^3$

- $\xi = dz - \dfrac{1}{2}(xdy - ydx)$. $\Delta = \ker \xi$.
- $\Delta = \mathrm{Span}\{X, Y\}$, donde

$$\begin{cases} X = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2}\frac{\partial}{\partial z} \\ Y = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2}\frac{\partial}{\partial z} \\ Z = \frac{\partial}{\partial z} \end{cases}$$

- $[X, Y] = Z$, $[X, Z] = [Y, Z] = 0$.
- Damos a $\mathbb{G}$ la métrica g tal que X, Y, Z son ortonormales.

El grupo de Heisenberg $\mathbb{G} = \mathbb{R}^3$

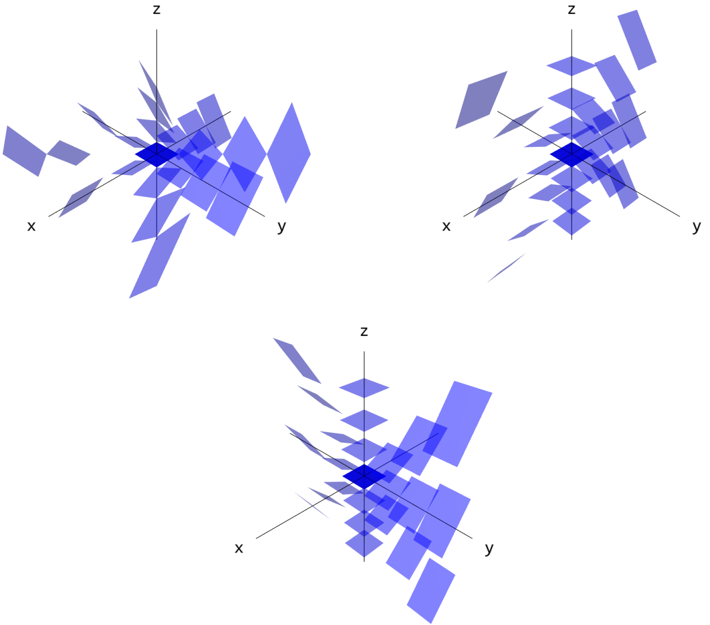
- $\xi = dz - \dfrac{1}{2}(xdy - ydx)$. $\Delta = \ker \xi$.
- $\Delta = \mathrm{Span}\{X, Y\}$, donde

$$\begin{cases} X = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2}\frac{\partial}{\partial z} \\ Y = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2}\frac{\partial}{\partial z} \\ Z = \frac{\partial}{\partial z} \end{cases}$$

- $[X, Y] = Z$, $[X, Z] = [Y, Z] = 0$.
- Damos a $\mathbb{G}$ la métrica g tal que X, Y, Z son ortonormales.
- Si $\alpha' \in \Delta$,

$$\mathcal{L}_g(\alpha) = \mathcal{L}_{\mathbb{R}^2}(\pi \circ \alpha).$$

La distribución Δ



Condición de Hörmander

Definición

$\Delta \subseteq T(M)$ satisface la **condición de Hörmander** si

$$[\mathrm{Lie}(\Gamma(\Delta))]_p = T_p(M), \quad \forall p \in M.$$

Condición de Hörmander

Definición

$\Delta \subseteq T(M)$ satisface la **condición de Hörmander** si

$$[\mathrm{Lie}(\Gamma(\Delta))]_p = T_p(M), \quad \forall p \in M.$$

Definición

$\gamma\colon [a, b] \to M$ es una **curva horizontal** si:

1. γ es absolutamente continua.
2. $\gamma'(t) \in \Delta_{\gamma(t)}$ para casi todo $t \in [a, b]$.

Distancia de Carnot-Carathéodory

(M, Δ, g) variedad subriemanniana, $p, q \in M$:

Distancia de Carnot-Carathéodory

(M, Δ, g) variedad subriemanniana, $p, q \in M$:

$$d_{CC}(p,q) = \text{ínf}\{\mathcal{L}(\gamma) \colon \gamma \text{ curva horizontal de } p \text{ a } q\}.$$

Distancia de Carnot-Carathéodory

(M, Δ, g) variedad subriemanniana, $p, q \in M$:

$$d_{CC}(p,q) = \text{ínf}\{\mathcal{L}(\gamma) \colon \gamma \text{ curva horizontal de } p \text{ a } q\}.$$

¡OJO! $d_{CC}(p,q) \geq d_g(p,q)$.

Distancia de Carnot-Carathéodory

(M, Δ, g) variedad subriemanniana, $p, q \in M$:

$$d_{CC}(p,q) = \text{ínf}\{\mathcal{L}(\gamma) \colon \gamma \text{ curva horizontal de } p \text{ a } q\}.$$

¡OJO! $d_{CC}(p,q) \geq d_g(p,q)$.

Teorema de Chow

M conexa, $\Delta \subseteq T(M)$ Hörmander $\implies$ para todo $p, q \in M$ existe γ horizontal ($\mathcal{C}^\infty$ a trozos) de p a q.

Distancia de Carnot-Carathéodory

(M, Δ, g) variedad subriemanniana, $p, q \in M$:

$$d_{CC}(p,q) = \text{ínf}\{\mathcal{L}(\gamma) \colon \gamma \text{ curva horizontal de } p \text{ a } q\}.$$

¡OJO! $d_{CC}(p,q) \geq d_g(p,q)$.

Teorema de Chow

M conexa, $\Delta \subseteq T(M)$ Hörmander $\implies$ para todo $p, q \in M$ existe γ horizontal ($\mathcal{C}^\infty$ a trozos) de p a q.

Corolario

(M, d_{CC}) es un espacio métrico y la topología inducida por d_{CC} es igual a la topología de la variedad.

Chow vs. Frobenius

$\Delta \subseteq T(M)$ es **involutiva** si:

$$X, Y \in \Gamma(\Delta) \implies [X, Y] \in \Gamma(\Delta).$$

Chow vs. Frobenius

$\Delta \subseteq T(M)$ es **involutiva** si:

$$X, Y \in \Gamma(\Delta) \implies [X, Y] \in \Gamma(\Delta).$$

Teorema de Frobenius

Δ involutiva $\implies$ por cada $p \in M$ pasa una variedad integral, y

$$A_p = \{q \in M \colon \text{existe } \gamma,\ \mathcal{C}^\infty \text{ a trozos de } p \text{ a } q \text{ con } \gamma' \in \Delta\}$$

es la variedad integral maximal de Δ por p.

$\mathbb{G}$ como grupo de Lie

Operación en $\mathbb{G}$

$$(x, y, z) \cdot (x', y', z') = \left(x + x', y + y', z + z' + \frac{1}{2}[xy' - yx'] \right)$$

$\mathbb{G}$ como grupo de Lie

Operación en $\mathbb{G}$

$$(x, y, z) \cdot (x', y', z') = \left(x + x', y + y', z + z' + \frac{1}{2}[xy' - yx']\right)$$

- Las traslaciones por la izquierda preservan $X, Y, Z \implies$ son isometrías.

$\mathbb{G}$ como grupo de Lie

Operación en $\mathbb{G}$

$$(x, y, z) \cdot (x', y', z') = \left(x + x', y + y', z + z' + \frac{1}{2}[xy' - yx'] \right)$$

- Las traslaciones por la izquierda preservan $X, Y, Z \implies$ son isometrías.
- $\mathfrak{g} = \mathrm{Span}\{X, Y, Z\}$.

$\mathbb{G}$ como grupo de Lie

Operación en $\mathbb{G}$

$$(x,y,z)\cdot(x',y',z') = \left(x+x', y+y', z+z'+\frac{1}{2}[xy'-yx']\right)$$

- Las traslaciones por la izquierda preservan $X, Y, Z \implies$ son isometrías.
- $\mathfrak{g} = \mathrm{Span}\{X, Y, Z\}$.
- $\mathbb{G}$ es isomorfo a

$$\mathrm{Nil}(3) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\} \leq \mathrm{GL}(3, \mathbb{R}).$$

Geodésicas de $\mathbb{G}$ que empiezan en $(0,0,0)$

- Circunferencias con centro en el eje x + recta $x = 0$.

Geodésicas de $\mathbb{G}$ que empiezan en $(0, 0, 0)$

- Circunferencias con centro en el eje x + recta $x = 0$.

$$\psi(k,t) = \left(\frac{\cos(kt) - 1}{k}, \frac{\sin(kt)}{k} \right), \quad k \in \mathbb{R}, 0 \leq t \leq \frac{2\pi}{|k|}.$$

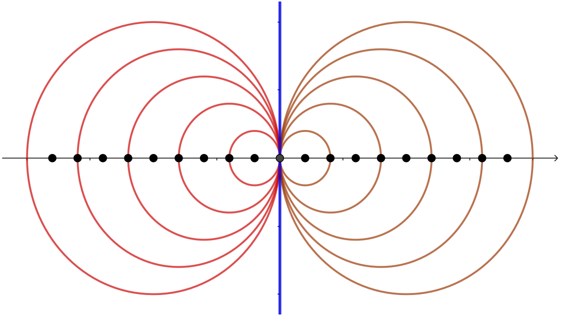
- Centro: $\left(-\frac{1}{k}, 0\right)$. Radio: $\dfrac{1}{|k|}$. $\psi(0,t) = (0,t)$.

Geodésicas de $\mathbb{G}$ que empiezan en $(0,0,0)$

- Circunferencias con centro en el eje x + recta $x = 0$.

$$\psi(k,t) = \left(\frac{\cos(kt)-1}{k}, \frac{\sin(kt)}{k}\right), \quad k \in \mathbb{R}, 0 \le t \le \frac{2\pi}{|k|}.$$

- Centro: $\left(-\frac{1}{k}, 0\right)$. Radio: $\dfrac{1}{|k|}$. $\psi(0,t) = (0,t)$.



Geodésicas de $\mathbb{G}$ que empiezan en $(0,0,0)$

- Rotaciones de ángulo $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$:

$$\psi(\theta, k, t) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\cos(kt)-1}{k} \\ \frac{\sin(kt)}{k} \end{pmatrix}$$

Geodésicas de $\mathbb{G}$ que empiezan en $(0,0,0)$

- Rotaciones de ángulo $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$:

$$\psi(\theta, k, t) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\cos(kt)-1}{k} \\ \frac{\sin(kt)}{k} \end{pmatrix}$$

- Calculamos $z(\theta, k, t)$.

$$\begin{aligned} z(\theta, k, t) =& \mathcal{A}(\psi(\theta, k, \cdot)|_{[0,t]}) \\ =& \frac{1}{2}\int_0^t x(\theta, k, s)\frac{\partial y}{\partial s}(\theta, k, s) - y(\theta, k, s)\frac{\partial x}{\partial s}(\theta, k, s) ds \\ =& \dots \end{aligned}$$

Geodésicas de $\mathbb{G}$ que empiezan en $(0, 0, 0)$

In [11]:
```
z(T)=(1/2)*integral(x(t)*y.diff(t)-y(t)*x.diff(t),t,0,T)
```

In [12]:
```
show(z)
```

$$T \mapsto \frac{\left(T \cos\left(a\right)^{2} + T \sin\left(a\right)^{2}\right)k - \left(\cos\left(a\right)^{2} + \sin\left(a\right)^{2}\right) \sin(Tk)}{2\,k^{2}}$$

In [13]:
```
show(z.full_simplify())
```

$$\frac{Tk - \sin(Tk)}{2\,k^{2}}$$

Geodésicas de $\mathbb{G}$ que empiezan en $(0,0,0)$

In [11]:
```
z(T)=(1/2)*integral(x(t)*y.diff(t)-y(t)*x.diff(t),t,0,T)
```

In [12]:
```
show(z)
```

$$T \mapsto \frac{\left(T\cos\left(a\right)^2 + T\sin\left(a\right)^2\right)k - \left(\cos\left(a\right)^2 + \sin\left(a\right)^2\right)\sin(Tk)}{2\,k^2}$$

In [13]:
```
show(z.full_simplify())
```

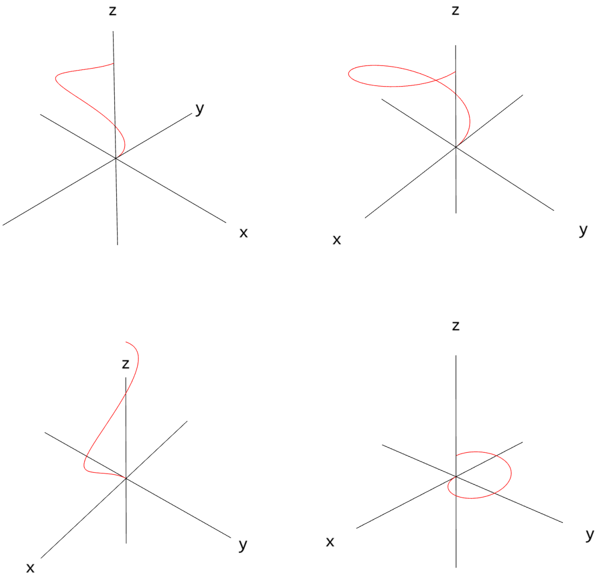
$$\frac{Tk - \sin(Tk)}{2\,k^2}$$

$$x(\theta,k,t) = \frac{\cos\theta(\cos(kt)-1) - \sin\theta\sin(kt)}{k}$$

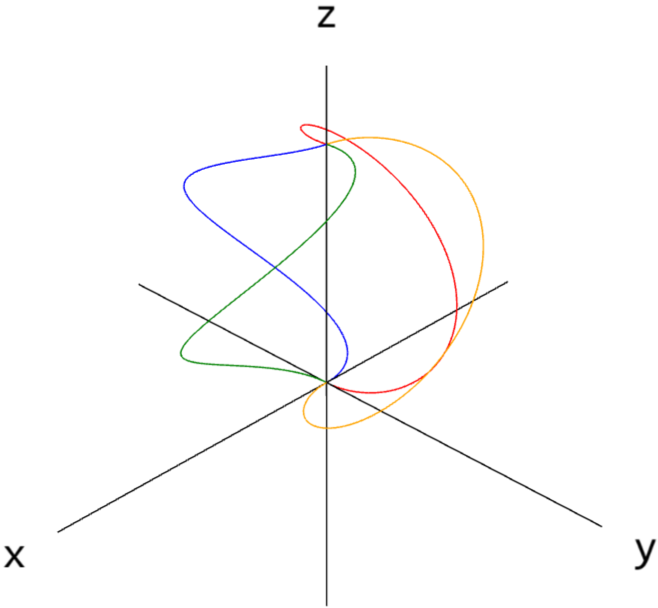
$$y(\theta,k,t) = \frac{\sin\theta(\cos(kt)-1) + \cos\theta\sin(kt)}{k}$$

$$z(\theta,k,t) = \frac{kt - \sin(kt)}{2k^2}$$

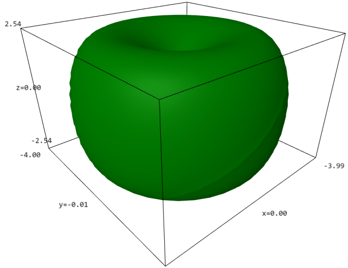
Geodésicas de $\mathbb{G}$ que empiezan en $(0, 0, 0)$

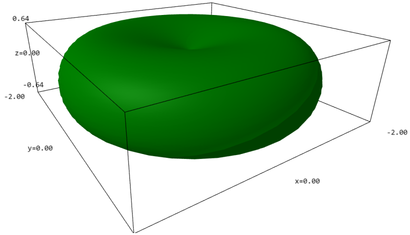


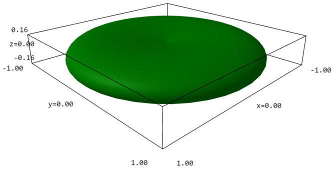
Las geodésicas no son únicas

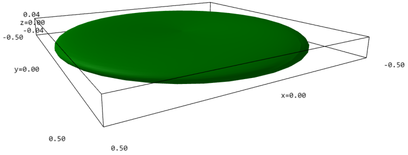


Bolas en $\mathbb{G}$









Dilataciones en $\mathbb{G}$

Dilatación de factor $\lambda > 0$

$$\delta_\lambda(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda^2 z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{G}.$$

Dilataciones en $\mathbb{G}$

Dilatación de factor $\lambda > 0$

$$\delta_\lambda(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda^2 z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{G}.$$

- $d_{CC}(\delta_\lambda(p), \delta_\lambda(q)) = \lambda d_{CC}(p, q)$.

Dilataciones en $\mathbb{G}$

Dilatación de factor $\lambda > 0$

$$\delta_\lambda(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda^2 z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{G}.$$

- $d_{CC}(\delta_\lambda(p), \delta_\lambda(q)) = \lambda d_{CC}(p, q)$.
- $B_{CC}(p, R) = L_p(\delta_R(B_{CC}(0, 1)))$.

Dilataciones en $\mathbb{G}$

Dilatación de factor $\lambda > 0$

$$\delta_\lambda(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda^2 z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{G}.$$

- $d_{CC}(\delta_\lambda(p), \delta_\lambda(q)) = \lambda d_{CC}(p, q)$.
- $B_{CC}(p, R) = L_p(\delta_R(B_{CC}(0, 1)))$.
- Como $\det d(L_g)_p = 1$ y $\det d(\delta_\lambda)_p = \lambda^4$,

$$\mu(B_{CC}(p, R)) = R^4 \mu(B_{CC}(0, 1)).$$

Dilataciones en $\mathbb{G}$

Dilatación de factor $\lambda > 0$

$$\delta_\lambda(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda^2 z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{G}.$$

- $d_{CC}(\delta_\lambda(p), \delta_\lambda(q)) = \lambda d_{CC}(p, q)$.
- $B_{CC}(p, R) = L_p(\delta_R(B_{CC}(0, 1)))$.
- Como $\det d(L_g)_p = 1$ y $\det d(\delta_\lambda)_p = \lambda^4$,

$$\mu(B_{CC}(p, R)) = R^4 \mu(B_{CC}(0, 1)).$$

Teorema

La dimensión de Hausdorff del grupo de Heisenberg es

$$\dim_H \mathbb{G} = 4.$$

Bibliografía

- E. LeDonne, *Lecture notes on sub-Riemannian geometry*, https://sites.google.com/site/enricoledonne/ (notas).
- R. Montgomery, *A Tour of Subriemannian Geometries, Their Geodesics and Applications*, American Mathematical Soc., 2002.
- F. W. Warner, *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, Srpinger, 1983.
- M. d. l. Á. Hernández Cifre & J. A. Pastor González, *Un curso de geometría diferencial*, Editorial CSIC, 2010.


“That’s all Folks!”